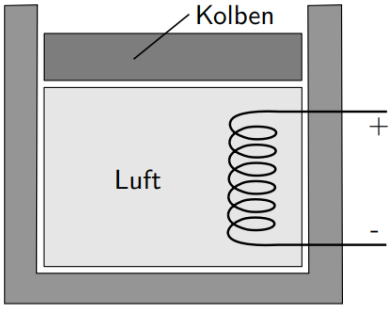
Vorrechenübung

Aufgabe 1.1 ●●○ Bilanzgrenzen

In einem Zylinder ist $0.272\,\text{kg}$ Luft von oben mit einem Kolben eingeschlossen. Der Kolben hat eine Grundfläche von $0.0929\,\text{m}^2$ und ein Gewicht von $45.36\,\text{kg}$. Der Kolben kann sich reibungsfrei an der Zylinderwand vertikal nach oben und unten bewegen um den Druck der Luft im Zylinder konstant zu halten. Von oben wirkt auf den Kolben der Druck der Atmosphäre mit $101\,400\,\text{Pa}$. Für Zylinder und Kolben wird angenommen, dass keine Wärme durch sie hindurch oder in sie hinein fliesst. Die lokale Erdbeschleunigung ist $9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Durch einen elektrischen Strom, der durch einen Widerstand im Zylinder fliesst, wird Wärme auf die Luft übertragen. Dabei erhöht sich das Volumen der Luft im Zylinder langsam um $0.0453\,\text{m}^3$ und die spezifische innere Energie steigt um $41.868\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$. Der Druck bleibt dabei konstant und der Kolben ist am Anfang und Ende des Vorgangs in Ruhe.



$$p_{aussen} = 101\,400\,\text{Pa}$$
$$m_{Kolben} = 45.36\,\text{kg}$$
$$A_{Kolben} = 0.0929\,\text{m}^2$$
$$m_{Luft} = 0.272\,\text{kg}$$
$$V_2 - V_1 = 0.0453\,\text{m}^3$$
$$\Delta u_{Luft} = 41.868\,\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Abbildung 1: Luft-Kolben-System mit Heizwendel.

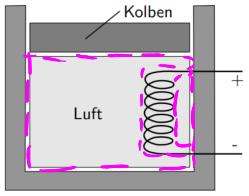
Bestimme die Wärme, die in das System fliesst. Verwenden Sie dafür folgende zwei Lösungswege:

a) Energieerhaltung für ein System, das aus der eingeschlossenen Luft besteht

⓪ Was / wie ist gefragt

ges: Q über Spezifikation/Lösungsweg: ein. gesl. Luft

① System und seine Grenze identifizieren



Keine Masse Fluss $\dot{m} = 0$

⇒ Geschlossenes Sys.
Adiabat (isoliert)

② Energiebilanz-Gleichung für Gesch. Sys. aufstellen

Aus ZF

Energie

Gesamte Energie: $E = U + KE + PE$

- Geschlossenes System an einem Kolben: $\frac{dE}{dt} = \sum_j \dot{Q}_j - \sum_n \dot{W}_{V,n}$ $\quad \Delta E = E_2 - E_1 = \sum_j Q_j - \sum_n W_{V,n}$

$$\Delta E = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE = Q - W_V$$

③ Vereinfachung der Gleichung mit Annahmen / Info

$$\Delta E = \Delta U + \cancel{\Delta KE} + \cancel{\Delta PE} = Q - W_v$$

$\Delta KE = 0$, Ruhe bei Anfang, Ende

$\Delta PE = 0$, Aus Vorlesung PE der Luft/Gase vernachlässigen

$$\Delta U = Q - W_v$$

④ Diese Gleichung mit geg. Info Lösen.

Trick: Dimension (Einheiten) Analysis

$\Delta U : [kJ]$ $m_{Luft} : [kg]$ $\Delta u_{Luft} : \left[\frac{kJ}{kg}\right]$

Um $[kJ]$ zu bekommen, müssen $[\cancel{kg}] \cdot \left[\frac{kJ}{\cancel{kg}}\right] = [kJ]$

Somit ist $\Delta U = m_{Luft} \cdot \Delta u_{Luft}$

$$\Delta U = m_{Luft} \cdot \Delta u_{Luft} = 11{,}388096\ kJ$$

Spezifische Volumenarbeit
(reversible Änderung des Systemvolumens)

$$w_{V,12}^{rev} = \frac{W_{V,12}^{rev}}{m} = \int_1^2 p\,dv$$

v: spezifische Volume $\left[\frac{m^3}{kg}\right]$ V: Volume $[m^3]$

$m : [kg]$

$\Rightarrow \left[\frac{m^3}{kg}\right] \cdot [kg] = [m^3]$

$\Rightarrow v \cdot m = V$

Herleitung von Formel aus ZF zu anwendbare Formel

Spezifische Volumenarbeit
(reversible Änderung des Systemvolumens)

$$w_{V,12}^{rev} = \frac{W_{V,12}^{rev}}{m} = \int_1^2 p\,dv$$

rev: reversibel

Kolben reibungsfrei ⇒ reversibele Arbeit

$$\frac{W_V}{m} = \int_1^2 p\,dv \qquad | \cdot m$$

$p = \text{const}$

$dv \cdot m = dV$

$$W_V = p \int_1^2 dV$$

$$W_V = \int_1^2 p\,dv$$

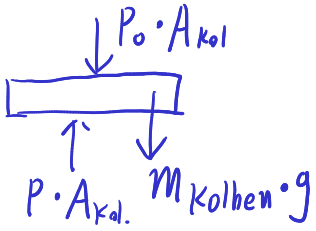
$$= p \int_1^2 dv = p[V]_{V_1}^{V_2}$$

$$= p(V_2 - V_1)$$

$p, (V_2 - V_1)$ geg. einsetzen

$W_V = 4.81\,kJ$

GGW für Kolben



$p_0 \cdot A_{Kolben} + m_{Kolben} \cdot g = p \cdot A_{Kolben}$

p_0: p_{Aussen}

alle Werte geg. einset.

$p = 106190\,Pa$

alle zurück einsetzen $Q = \Delta U + W_V = \underline{16,198\,kJ}$

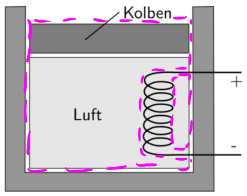
16,2 kJ : ML. ✓

b) Energieerhaltung für ein System, das aus der eingeschlossenen Luft und dem Kolben besteht

⓪ Was / wie ist gefragt

ges: Q Spezifikation/Lösungsweg: Luft u. Kolben

① System und seine Grenze identifizieren



Keine Masse Fluss $\dot{m} = 0$

⇒ Geschlossenes Sys.
Adiabat (isoliert)

Nicht mehr homogen ⇒ Sys.

Sub. sys Luft Sub. sys. Kolben

② Energiebilanz-Gleichung aufstellen

$$\Delta E = \Delta E_{Luft} + \Delta E_{Kolben} = Q - W_v$$

$$\Delta E_{Kolben} = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE$$

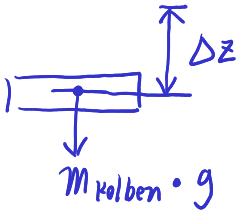
$$\Delta E_{Luft} = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE$$

③ Vereinfachung der Gleichung mit Annahmen / Info

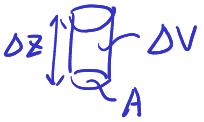
$\Delta E_{Kolben} = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE$

$\Delta U = 0$, Temp. → const.
Keine Wärme fluss

$\Delta KE = 0$, Ruhe Anfang, Ende



$$\Delta z = \frac{(V_2 - V_1)}{A_{Kolben}} = 0{,}4876\ m$$



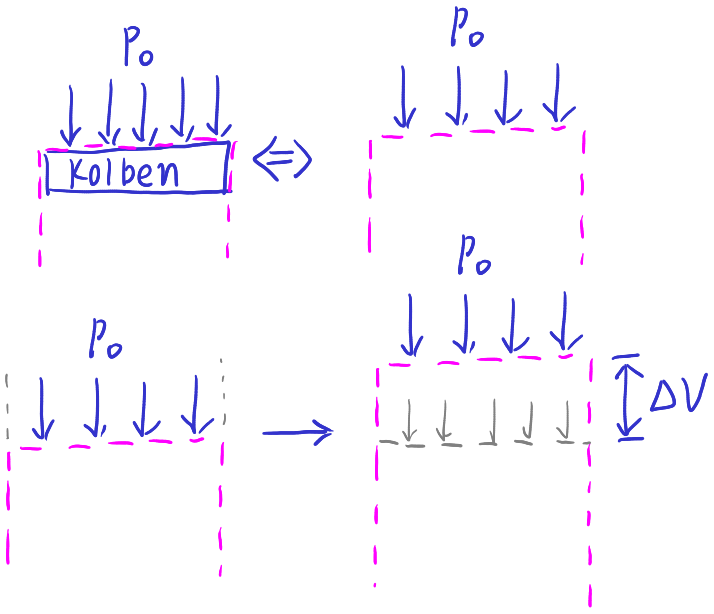
$$\Delta E_{Kolben} = \Delta PE = m_{Kolben} \cdot g \cdot \Delta z = 0{,}217\ kJ$$

$$\Delta E_{Luft} = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE$$

$$= \Delta U = 11{,}388096\ kJ \quad \text{aus a)}$$

$$W_v = P_0 (V_2 - V_1)$$

$$= 4{,}593\ kJ$$



④ Alle einsetzen und lösen.

$$\Delta E = \Delta E_{Luft} + \Delta E_{Kolben} = Q - W_v$$

$$Q = \Delta E_{Luft} + \Delta E_{Kolben} + W_v$$

$$= 11{,}388096\ kJ + 0{,}217\ kJ + 4{,}593\ kJ$$

$$= \underline{16{,}1981\ kJ}$$

ML.: 16,2 kJ ✓

Resultat aus a) u. b) das Gleiche

Lösungsweg a), b) beide geht

⇒ In der Zukunft auch, manchmal mehrere Lösungsweg möglich. Man muss für sich selbst das Beste finden.